Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ 13/12/2016.

Θέματα που θα συζητήσουμε μέχρι το τέλος του εξαμήνου
(α) Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης
(β) Θεώρημα Taylor
(γ) Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων
(δ) Ακρότατα πραγματικών συναρτήσεων υπό συνθήκη.
(ε) Θεωρήματα Πεπλεγμένης και αντίστροφης συνάρτησης.

Μερικές Παράγωγοι Ανώτερης Τάξης

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $\bar{x}_0 \in U$. Τότε η f ονομάζεται δύο φορές μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{x}_0 \iff$

$\exists$ ανοικτό $V \subset U$ με $\bar{x}_0 \in V$: $\exists \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}(\bar{x})\ \forall \bar{x} \in V$, $\forall i = 1, \dots, n$ και είναι όλες μερικώς διαφορίσιμες στο $\bar{x}_0$.

Οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_0)$ $k = 1, \dots, n$ ονομάζονται <u>μερικές παράγωγοι 2ης τάξης</u> (ενώ οι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$ ονομάζονται μερικές παράγωγοι 1ης τάξης).

και συμβολίζονται με:

$$\frac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i}(\bar{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(\bar{x}_0)$$

[Προσοχή! Στη βιβλιογραφία κάποιες φορές αυτή η μερική παράγωγος 2ης τάξης συμβολίζεται με $\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_i \partial x_k}$, δηλαδή με αντίστροφη σειρά στα ∂x_k, ∂x_i]

[Όπως θα δούμε συνήθως υπό κάποια ιδιότητα της $\bar{f}$ ($f \in C^2(U, \mathbb{R}^m)$) η σειρά αυτή δεν παίζει ρόλο]

[άλλοι συμβολισμοί: $\partial x_k \partial x_i f_j$, $(f_j)_{x_i x_k}$ κλπ].

Αυτός ο ορισμός επεκτείνεται και σε μερικές παραγώγους ανώτερης τάξης $k \in \mathbb{N}$:

<u>Ορισμός</u>: Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \in \mathbb{R}^n$. Η $\bar{f}$ καλείται $(k+1)$-φορές μερικώς διαφορίσιμη, αν είναι k-φορές μερικώς διαφορίσιμη και $\exists$ οι μερικές παράγωγοι <u>$(k+1)$-τάξης</u> της f:

$$\frac{\partial^{k+1} f_j}{\partial x_{i_{k+1}} \cdots \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}}\left(\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdots \partial x_{i_1}}\right) : U \to \mathbb{R}. \quad j = 1, \dots, m \quad i = 1, \dots, i_{k+1}$$

Η f ονομάζεται $(k+1)$-φορές συνεχώς διαφορίσιμη αν είναι $(k+1)$-φορές μερικώς διαφορίσιμη και όλες οι μερικές παράγωγοι τάξης $\leq k+1$ είναι συνεχείς.

Παρατήρηση! (ειδική και πιο συχνή περίπτωση):

$f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό

Τότε f (1 φορά) μερικώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow \exists \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) = \nabla f : U \to \mathbb{R}^n$

f (2 φορές) μερικώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$

$$\exists \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} = H_f : U \to \mathbb{R}^{n \times n}$$

όπου H_f ονομάζεται Εσσιανός Πίνακας της f και

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \left(= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\right)$$

Αν οι αντίστοιχες μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς τότε η f ονομάζεται αντίστοιχα (1-φορά) συνεχώς διαφορίσιμη $f \in C^1(U)$ και $\nabla f = Df$

και (2-φορές) συνεχώς διαφορίσιμη $f \in C^2(U)$ και $H_f = D^2 f$ ονομάζεται δεύτερη παράγωγος της f.

Επαγωγικά λέμε ότι μια $f: U \to \mathbb{R}$ είναι άπειρες φορές συνεχώς διαφορίσιμη $f \in C^{\infty}(U)$, αν $\forall$ τάξη $k \in \mathbb{N}$ υπάρχουν όλες οι μερικές παράγωγοι μέχρι και k-τάξης και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

[Θεωρώντας ότι η f ισούται με την παράγωγο μηδενικής τάξης έχουμε $f = C^{0}(U) = C(U)$]

Οι μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης όπου δεν παραγωγίζουμε συνέχεια ως προς την ίδια μεταβλητή ονομάζονται <u>μεικτές μερικές παράγωγοι</u>

πχ. αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ είναι μεικτές μερικές παράγωγοι

Ενώ οι

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ και $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ δεν ονομάζονται μεικτές

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω η $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

$$h(x,y) = \begin{cases} x \cdot y \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$h \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ αφού η $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ είναι ρητή και όσες φορές και να την παραγωγίσω μερικώς ως προς x ή y με οποιαδήποτε σειρά θα έχω μια ρητή στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ η οποία ως τέτοια θα είναι συνεχής.

Επίσης, (1) $\dfrac{\partial h}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x,0) - h(0,0)}{x} = 0$

$\dfrac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0$

$\Rightarrow$ h είναι μερικώς διαφ. στο $\mathbb{R}$.

(2) $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} y \dfrac{x^4 - y^4 + 4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$

Έχουμε ότι $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,y) \Rightarrow \left|\dfrac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right| \leq \underbrace{|y|}_{\|(x,y)\|} \dfrac{6\|(x,y)\|^4}{\|(x,y)\|^4} \to 0$

$\Rightarrow h \in C^1(\mathbb{R}^2)$

Ως προς τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης

Βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) = 4xy^3 \frac{-x^2+3y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) = 4x^3y \frac{-3x^2+y^2}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{x^6-9x^2y^4+9x^4y^2-y^6}{(x^2+y^2)^3}.$$

και στο σημείο $(0,0)$ βρίσκουμε:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0)}{x} = \cdots = 0.$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = \lim_{x\to 0} \; - - - = 0$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = \dots = 1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0) = \dots = -1.$$

Επομένως η h είναι μερικώς διαφορίσιμη 2 φορές σε όλο το $\mathbb{R}^2$.

Προκύπτει άρα $h \notin C^2(\mathbb{R}^2)$, και ειδικότερα (αφού $h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$) ότι τουλάχιστον μία από τις μεικτές μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης <u>δεν</u> είναι συνεχής στο $(0,0)$

<u>Θεώρημα Schwarz</u>: έστω $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $f \in C^k(U)$, $k \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow$ όλες οι μεικτές παράγωγοι μέχρι και k τάξης είναι ίσες.

Ειδικότερα: $f \in C^2(U) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x} : U \to \mathbb{R}$.

Αυτό προκύπτει από την εξής πρόταση:
Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό δύο φορές παραγωγίσιμη

$$\left(\Leftrightarrow \exists \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : U \to \mathbb{R} \right)$$

Και μάλιστα αρκεί να έχουμε μόνο τις παραγώγους πρώτης τάξης $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} : U \to \mathbb{R} \right)$ και έστω ότι υπάρχει και η

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : U \to \mathbb{R}$ και είναι συνεχής στο (x,y)

τότε $\exists \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y)$ και ισχύει: $\dfrac{\partial f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y \partial x}(x,y)$.

<u>Γενίκευση</u>: $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, μερικώς διαφ. και $\exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} : U \to \mathbb{R}$ για κάποια $j \neq i \in \{1, \dots, n\}$ και είναι συνεχής στο $\bar{x}$ $\Rightarrow \exists \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x})$.

Δεν ξεχνώ: $|x| \leq \|(x,y)\|$

→ <u>Απόδειξη Γενίκευσης</u>: ΘΔΟ →
$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}+h\bar{e}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})}{h}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{x})$$
$\downarrow$ α

$$\iff (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)\ \forall h\in(-\delta,0)\cup(0,\delta):$$

$$\left|\frac{\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x}+h\bar{e}_i)-\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})}{h}-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{x})\right|<\varepsilon. \iff$$

$$\iff \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})=\lim_{k\to 0}\frac{f(\bar{x}+k\bar{e}_j)-f(\bar{x})}{k} \implies (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall\, 0<|h|<\delta):$$

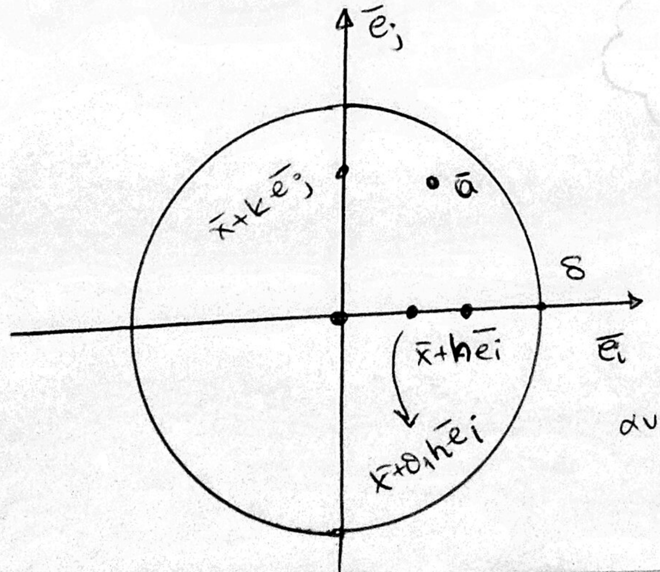
$$\left|\lim_{k\to 0}\frac{f(\bar{x}+h\bar{e}_i+k\bar{e}_j)-f(\bar{x}+h\bar{e}_i)-f(\bar{x}+k\bar{e}_j)+f(\bar{x})}{h\cdot k}-\alpha\right|<\varepsilon \iff$$

$$\iff \left|\lim_{k\to 0}\frac{\Phi(k)}{hk}-\alpha\right|<\varepsilon \quad (1)$$

Έχουμε $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ συνεχής στο $\bar{x} \Rightarrow (\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall \bar{y}\in B(\bar{x},\delta))$ να:

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{y})-\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{x})}_{\alpha}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε $\exists\delta>0$ έτσι ώστε να ισχύει το (2).
Έστω $h,k\neq 0$ με $\|(h,k)\|<\delta \Rightarrow \bar{x}+\theta_1 h\bar{e}_i+\theta_2 k\bar{e}_2\in B(\bar{x},\delta)$ $\forall\theta_1,\theta_2\in[0,1]$



Από (2) $\Rightarrow$ για όλα τα h,k,θ_1,θ_2.

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{a})-\alpha\right|<\frac{\varepsilon}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left|\lim_{k\to 0}\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}(\bar{a})-\alpha\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \quad \forall\, 0<|h|<\delta$$

αν το όριο $\exists$ υπάρχει.

→

Άρα για νδ το (1), αρκεί νδο για τα πιο πάνω h, k υπάρχουν $\theta_1, \theta_2 \in [0,1]$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\Phi(k)}{hk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x} + \theta_1 h \bar{e}_i + \theta_2 k \bar{e}_j)$$ και αφού

$$\lim_{k \to 0} \frac{\Phi(k)}{hk} = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x} + h\bar{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(\bar{x})\right)$$, θα έχουμε τελειώσει.